Početní část - 21.12.2021

1. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 y^2 + (y')^2 + 4xy$$

vzhledem k množině všech funkcí $y \in C^1([0,1])$, pro které platí $y(0) = 0$ a $y(1) = e^2 - 3$ (8 bodů).

Řešení:

Platí $F(y) = \displaystyle\int_0^1 f(x, y, y')$ pro funkci $f(x, y, z) = 4xy + y^2 + z^2$. Máme

$$f_y(x, y, z) = 4x + 2y, \quad f_z(x, y, z) = 2z.$$

Euler-Lagrangeova rovnice má tedy tvar

$$4x + 2y - (2y')' = 0,$$

po úpravě dostaneme lineární rovnici s konstantními koeficienty 2. řádu

$$y'' - y = 2x.$$

Obecné řešené rovnice je

$$y = Ae^x + Be^{-x} - 2x.$$

Okrajové podmínky jsou $y(0) = 0$ a $y(1) = e^2 - 3$ a tedy dostáváme jediný stacionární bod

$$y = e^{x+1} - e^{-x+1} - 2x.$$

Protože $f_{yy} = 2$, $f_{yz} = 0$ a $f_{zz} = 2$ a matice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ je pozitivně definitivní je F konvexní funkcionál a tedy plati, že y je vzhledem k zadané množině bodem globálního minima F.

2. Uvažme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3 x}{1+n^4x^2}$$

pro $x \in (0,\infty)$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí

(a) řada konverguje stejnoměrně na $(0,\infty)$,

(b) řada konverguje stejnoměrně na $(0,1]$,

(c) řada konverguje stejnoměrně na $[1,\infty)$,

(d) řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(0,\infty)$.

(10 bodů).

Řešení: Položme $a_n(x) = \dfrac{n^3x}{1+n^4x^2}$. Potom

$$a_n'(x) = \frac{n^3\left(1-n^2x\right)\left(n^2x+1\right)}{\left(n^4x^2+1\right)^2}.$$

Tedy a_n nabývá globálního maxima $\frac{n}{2}$ v bodě $\frac{1}{n^2}$ (rovněž $a_n > 0$ na $(0,\infty)$).

Dále

$$a_n\left(\tfrac{1}{n^2}\right) = \tfrac{n}{2} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Protože $\frac{1}{n^2} \to 0$, řada nekonverguje stejnoměrně ani na $(0,\infty)$ ani na $(0,1]$ (není splněna nutná podmínka) a (a), ani (b) neplatí.

Volme $\alpha \in (0,\infty)$ a pro $x \in [\alpha,\infty)$ položme

$$f_x(y) = \frac{y^3x}{1+y^4x^2}, \quad y > 0.$$

Spočítáme

$$f_x'(y) = xy^2\frac{3-y^4x^2}{(1+y^4x^2)^2}.$$

Platí tedy, že f_x je klesající na $\left[\frac{3^{\frac14}}{\sqrt{x}},\infty\right)$ a tedy i na $\left[\frac{3^{\frac14}}{\sqrt{\alpha}},\infty\right)$. A tedy

$$a_n(x) \geq a_{n+1}(x), \quad x \in [\alpha,\infty), \quad n > \frac{3^{\frac14}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Podle dříve spočteného rovněž platí pro $n > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ a $x \in [\alpha,\infty)$

$$0 \leq a_n(x) \leq a_n(\alpha) = \frac{n^3\alpha}{1+n^4\alpha^2} \to 0$$

a tedy $a_n \rightrightarrows 0$ na $[\alpha,\infty)$, protože $(-1)^n$ má (stejně) omezené částečné součty platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3x}{1+n^4x^2} \rightrightarrows, \quad \text{na } [\alpha,\infty).$$

Tvrzení (c) i (d) tedy platí.

3. Spočtěte $\int_M 3y^6$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le xy \le 3,\ 2x \le y^2 \le 4x\right\}.$$

(9 bodů).

Řešení: Budeme integrovat přes množinu

$$\widetilde{M} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 3,\ 2x < y^2 < 4x\right\},$$

platí $\lambda_2(M \setminus \widetilde{M}) = 0$. Použijeme substituci $u = xy$, $v = \frac{y^2}{x}$, $(u,v) \in (0,3) \times (2,4) =: U$. Platí

$$uv = y^3, \quad \frac{u^2}{v} = x^3$$

Pro $\varphi(x,y) = (xy, \frac{y^2}{x})$ tedy existuje φ^{-1} na U a platí

$$\varphi^{-1}(u,v) = \left((uv)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{u^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\varphi^{-1}(U) = \widetilde{M},$$

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{uv}\right)^{\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}\left(\frac{u^2}{v^4}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}\left(\frac{v}{u^2}\right)^{\frac{1}{3}} & \frac{2}{3}\left(\frac{u}{v^2}\right)^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

a

$$|\det J_{\varphi^{-1}}| = \frac{1}{3v}.$$

Dále $y^6 = u^2v^2$ a $\det J_{\varphi^{-1}} \neq 0$ na U. Podle věty o substituci a Fubiniho věty platí

$$\int_{\widetilde{M}} 3y^6 = \int_U 3u^2v^2 \cdot \frac{1}{3v} = \int_0^3 \int_2^4 u^2 v \, dv \, du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 \cdot \left[\frac{u^2}{2}\right]_2^4 = 9\cdot(8-2) = 54.$$

4. Spočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\langle\gamma\rangle} \left(\frac{-ye^{\frac{y}{x}}}{x^2} + x + y\right) dx + \left(\frac{e^{\frac{y}{x}}}{x} + x + e^y\right) dy,$$

kde $\gamma(t) = (\cos t + 2, \sin t + 2)$, $t \in [0, \pi]$ (9 bodů).

Řešení:

Pro

$$F(x, y) = \left(\frac{-ye^{\frac{y}{x}}}{x^2} + x + y, \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x} + x + e^y\right)$$

snadno ověříme

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

a integrací (nebo odhadem) zjistíme $F = \nabla f$ pro

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + e^{\frac{y}{x}} + e^y.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned}
\int_{\langle\gamma\rangle} \left(\frac{-ye^{\frac{y}{x}}}{x^2} + x + y\right) dx + \left(\frac{e^{\frac{y}{x}}}{x} + x + e^y\right) dy &= f \circ \gamma(\pi) - f \circ \gamma(0) \\
&= f(1, 2) - f(3, 2) \\
&= \left(\frac{1}{2} + 2 + e^2 + e^2\right) - \left(\frac{9}{2} + 6 + e^{\frac{3}{2}} + e^2\right) \\
&= -8 + e^2 - e^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$